UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Anita Gantar

ALTERNIRAJOČE IN DRUGE VRSTE

Mentor: dr. Milan Hladnik

Ljubljana, 2011

1. Uvod

V seminarski nalogi bom najprej predstavila Leibnitzov kriterij za konvergenco alternirajočih vrst, nato pa bodo sledili dokazi naslednjih vrst:

- $\log 2 \;=\; 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$
- $\frac{\pi}{4} \;=\; 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$
- $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$

2. Alternirajoče vrste

Izrek 2.1 (Leibnitzov kriterij). *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alternirajoča vrsta, t.j.:*

$$\text{za vsak } n,\ \operatorname{sign}(a_{n+1}) = -\operatorname{sign}(a_n)$$

in naj bo $|a_1|,\ |a_2|, \ldots$ padajoče zaporedje z limito 0. Tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Dokaz. Naj bo $b_n = |a_n|$. Privzemimo, da je $a_1 < 0$. Torej $a_1 = -b_1$. Naša vrsta je tako $-b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \ldots$, kjer je $\{b_k\}_{n=1}^{\infty}$ padajoče zaporedje pozitivnih števil z limito 0. Naj bo s_n n-ta delna vsota vrste $-b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \ldots$ Velja:

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + \underbrace{b_{2n} - b_{2n+1}}_{\geq 0} \geq s_{2n-1}.$$

Podobno

$$s_{2n+2} = s_{2n} - b_{2n+1} + b_{2n+2} \leq s_{2n}.$$

Sledi $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots \leq s_6 \leq s_4 \leq s_2$. Torej je zaporedje $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ naraščajoče in navzgor omejeno, zato obstaja $\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = s'$ in podobno obstaja $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s''$. Jasno je $s' \leq s''$. Ker je

$$\begin{aligned} s' - s'' &= \lim_{n\to\infty} (s_{2n-1} - s_{2n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} (-b_{2n}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

sledi $s' = s'' = s$, torej $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. □

3. Elementarni dokaz dveh alternirajočih vrst

Pokazali bomo dokaz naslednjih dveh alternirajočih vrst:

$$\log 2 \;=\; 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \tag{1}$$

in

$$\frac{\pi}{4} \;=\; 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \tag{2}$$

Slednjo poznamo tudi pod imenom Gregory-Leibniz vrsta. O njej bom več zapisala v razdelku številka 8.

Najprej zapišimo potenčni vrsti $\log(1+x)$ in $\arctan x$:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \pm \cdots,\ -1 < x \leq 1,$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots,\ |x| \leq 1.$$

Če vstavimo v obe vrsti $x = 1$ dobimo ravno $\log(2)$ in $\frac{\pi}{4}$.
Za dokaz enakosti (1) in (2) bomo uporabili isto izhodišče. Naj bo

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx, \tag{3}$$

definirani integral, kjer je n poljubno pozitivno število. Najprej naredimo substitucijo $u = \tan x$ in $du = \frac{1}{\cos^2 x} dx = 1 + \tan^2 x dx = \sec^2 x dx$ oziroma $dx = \frac{du}{1+u^2}$. Spremenimo tudi spodnjo mejo integrala $u = \tan x = \tan 0 = 0 \Rightarrow u = 0$ in zgornjo mejo integrala $u = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow u = 1$. Beseda substitucija bo od sedaj naprej označevala slednjo substitucijo. Če se bo v seminarski pojavila še kakšna druga substitucija, jo bomo zapisali. Vse to uporabimo na integralu (3):

$$I_n = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2} du. \tag{4}$$

Ocenimo imenovalec našega integrala: $2u < 1 + u^2 < 2$ za $u \in (0, 1)$. V integralu (4) zamenjamo imenovalec z 2 in dobimo:

$$\int_0^1 \frac{u^n}{2} du = \left[\frac{u^{n+1}}{2(n+1)} \right]_0^1 = \frac{1}{2(n+1)}$$

Imenovalec integrala (4) zamenjamo z $2u$. Dobimo:

$$\int_0^1 \frac{u^n}{2u} du = \frac{1}{2} \int_0^1 u^{n-1} du = \left[\frac{u^n}{2n} \right]_0^1 = \frac{1}{2n}$$

Če upoštevamo še integral (4) dobimo:

$$\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2n} \tag{5}$$

Sedaj pošljemo $n \to \infty$, sledi:

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0. \tag{6}$$

Vidimo, da ko gre $n \to \infty$, vrednosti integrala (3) limitirajo proti nič. Torej vrednosti integrala konvergirajo.
Izračunajo naslednjo zvezo, ki nam bo pomagala pri nadaljnjih izračunih.

$$\begin{aligned}
I_n + I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x dx = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx + \tan^{n+2} x dx = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx (1 + \tan^2 x) dx = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx (\sec^2 x) dx \overset{\text{substitucija}}{=} \int_0^1 u^n du = \\
&= \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \\
&= \frac{1}{n+1} \qquad (7)
\end{aligned}$$

Definiramo naslednje:

$$\begin{aligned} E_n := (-1)^{n-1} I_{2n} &= (-1)^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^{2n} x dx \\ O_n := (-1)^{n-1} I_{2n-1} &= (-1)^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^{2n-1} x dx \end{aligned} \tag{8}$$

E_n je integral (3), v katerem nastopajo le sode potence funkcije $\tan x$, pomnožen z $(-1)^{n-1}$. Podobno velja za O_n, le da v njem nastopajo lihe potence. Izračunajmo rekurzivno zvezo za E_n.
Iz (7) sledi:

$$\begin{aligned} E_n - E_{n-1} &= (-1)^{n-1} I_{2n} - (-1)^{n-2} I_{2(n-1)} = (-1)^{n-1}(I_{2n} + I_{2n-2}) = \\ &= (-1)^{n-1}(I_{2n-2} + I_{(2n-2)+2}) \overset{(7)}{=} (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-2)+1} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \end{aligned}$$

Izpeljimo rekurzivno zvezo za O_n.
Iz (7) sledi:

$$\begin{aligned} O_n - O_{n-1} &= (-1)^{n-1} I_{2n-1} - (-1)^{n-2} I_{2n-3} \\ &= (-1)^{n-1}(I_{2n-1} + I_{2n-3}) = \\ &= (-1)^{n-1}(I_{2n-3} + I_{(2n-3)+2}) \overset{(7)}{=} (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-3)+1} = \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2n-2} \end{aligned}$$

Izračunajmo še prva člena rekurzivnih zvez:

$$\begin{aligned} E_1 &= (-1)^0 \cdot I_2 = I_2 = \int_0^1 \frac{u^2}{1+u^2} du = \int_0^1 \frac{u^2+1-1}{1+u^2} du = \\ &= \int_0^1 1 - \frac{1}{1+u^2} du = \Big[u\Big]_0^1 - \Big[\arctan u\Big]_0^1 = \\ &= 1 - \arctan 1 + \arctan 0 = \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_1 &= (-1)^{1-1} \cdot I_1 = I_1 = \int_0^1 \frac{u}{1+u^2} du \overset{\text{substitucija1}}{=} \int_1^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} dt = \\ &= \left[\frac{1}{2} log t\right]_1^2 = \frac{1}{2} log 2 - \frac{1}{2} log 1 = \\ &= \frac{1}{2} log 2 \end{aligned}$$

Uporabili smo naslednjo substitucijo: $1 + u^2 = t$ in $2udu = dt$. Novi meji sta: t=u+1=1 in t=1+1=2
Sedaj lahko s pomočjo rekurzivnih zvez in prvih dveh členov zapišemo naslednji končni vsoti:

$$E_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} - \frac{\pi}{4} \tag{9}$$

in

$$(10) \qquad O_n = \frac{1}{2} \cdot (\log 2 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}).$$

Dokažemo ju s popolno indukcijo:

$$E_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} - \frac{\pi}{4}$$

$$n = 1: \ \frac{(-1)^0}{1} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4} = E_1$$

$$n \ \to \ n+1: \ E_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} - \frac{\pi}{4}$$

Uporabimo rekurzivno zvezo:

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= \frac{(-1)^{(n+1)-1}}{2(n+1)-1} + E_n = \\ &= \frac{(-1)^{(n+1)-1}}{2(n+1)-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} - \frac{\pi}{4} = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Dokažimo še zvezo za O_n:

$$O_n = \frac{1}{2} \cdot (\log 2 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k})$$

$$n = 1: \ \frac{1}{2} \cdot \left(\log 2 - \sum_{k=1}^{0} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = \frac{1}{2} \cdot (\log 2 - 0) = \frac{1}{2} \cdot \log 2 = O_1$$

$$n \ \to \ n+1: \ O_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\log 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$

Uporabimo rekurzivno zvezo za O_n:

$$\begin{aligned}
O_{n+1} &= \frac{(-1)^{(n+1)-1}}{2(n+1)-2} + O_n = \\
&= \frac{(-1)^{(n+1)-1}}{2(n+1)-2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\log 2 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(-1)^{(n+1)-1}}{(n+1)-1} + \log 2 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\log 2 - \frac{(-1)^{(n+1)-2}}{(n+1)-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\log 2 - \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\log 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)
\end{aligned}$$

Enakosti (1) in (2) sledita iz (6), (8), (9) in (10).

Če združimo (8) in (10) dobimo naslednje:

$$O_n = (-1)^{n-1} I_{2n-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\log 2 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$

Sedaj uporabimo (6). Torej pošljemo $n \to \infty$.
Leva stran enakosti:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} I_{2n-1} = 0$$

in desna stran enakosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\log 2 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\log 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).$$

Sedaj ponovno enačimo levo in desno stran:

$$0 = \frac{1}{2} \cdot \left(\log 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$

V vrsti zamenjamo indeks k z indeksom n:

$$0 = \log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Vidimo, da je to v bistvu začetna vrsta (1).

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Sedaj nam ostane le še izpeljava enakosti (2). Združimo (8) in (9):

$$E_n = (-1)^{n-1} I_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} - \frac{\pi}{4}$$

Upoštevamo (6) na levi strani enakosti:

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}I_{2n}=0$$

in na desni strani enakosti:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}-\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}-\frac{\pi}{4}.$$

Združimo levo in desno stran enakosti:

$$0=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}-\frac{\pi}{4}$$

Preindeksiramo vrsto v n:

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}-\frac{\pi}{4}$$

Dobili smo začetno vrsto (2):

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

4. Tannery-jev izrek

Tannery-jev izrek (poimenovan po Jules Tannery (1848-1910)) ni zelo poznan izrek. Izrek je v bistvu posebni primer Weiestrassovega M- testa. Potrebovali ga bomo v nadaljevanju pri dokazu baselskega problema in Gregory-Leibniz vrste. Slednjo bomo v razdelku številka 8 dokazali še enkrat vendar na drugačen način.

Izrek 4.1 (Tannery)**.** *Če je za vsak n* $s(n)=\sum_{k\geq 0}f_k(n)$ *končna vsota (ali pa konvergentna vrsta),* $\lim_{n\to\infty}f_k(n)=f_k$, $|f_k(n)|\leq M_k$, *in* $\sum_{k=0}^{\infty}M_k<\infty$ *potem*

$$\lim_{n\to\infty}s(n)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k.$$

Dokaz. Za poljuben $\epsilon>0$ obstaja $N(\epsilon)$, tak, da je $\sum_{k\geq N(\epsilon)}M_k<\frac{\epsilon}{2}$. Za vsak k obstaja $N_k(\epsilon)$ tak, da velja $|f_k(n)-f_k|<\frac{\epsilon}{(3N(\epsilon))}$ za vsak $n\geq N_k(\epsilon)$. Naj bo $\bar{N}(\epsilon)=max\{N_1(\epsilon),\ldots,N_{N(\epsilon)}(\epsilon)\}$. Potem

$$|s(n)-\sum_{k}f_k|\leq\sum_{k=0}^{N(\epsilon)}|f_k(n)-f_k|+2\sum_{k>N(\epsilon)}M_k<N(\epsilon)\frac{\epsilon}{3N(\epsilon)}+2\frac{\epsilon}{3}=\epsilon$$

za vsak $n\geq\bar{N}(\epsilon)$. □

Izrek lahko povzamemo z naslednjo enakostjo:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}f_k(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty}f_k(n).$$

Torej s Tannery-jevim izrekom lahko pod določenimi pogoji zamenjamo limito in neskončno vsoto (seveda vemo, da lahko vedno zamenjamo limito in končno vsoto,

vendar pri neskončnih vsotah je to drugače).
Primer uporabe Tannery-jevega izreka je dokaz naslednjih formul za e^x:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Bralec najde dokaz v [5, pogl. 3].

5. Dokaz baselskega problema

Dokazali bomo naslednjo enakost:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6} = \zeta(2), \tag{11}$$

poznano tudi kot baselski problem. Prvi ga je predstavil Pietro Mengoli v letu 1644. Bolj znan pa je postal, ko je v letu 1689 o njem pisal Jakob Bernoulli. Jakob je bil brat Eulerjevega učitelja in mentorja Johanna Bernoullija, ki pa je problem po vsej verjetnosti predstavil Eulerju. Slednji ga je rešil leta 1735. Problem je dobil ime po mestu Basel, ki je rojstni kraj Eulerja in tudi družine Bernoulli.
Naš dokaz baselskega problema bo drugačen od Eulerjevega dokaza.
Vzemimo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2 x} &= \frac{1}{(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{-x}{2}}\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi+x}{2}}\right] \qquad (12)\end{aligned}$$

Sedaj v (12) vstavimo $x=\frac{\pi}{2}$ in ponavljamo postopek, ki smo ga nakazali v (12):

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{4}}\right] = \\ &= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{8}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{8}}+\frac{1}{\sin^2\frac{5\pi}{8}}+\frac{1}{\sin^2\frac{7\pi}{8}}\right] = \\ &= \frac{1}{64}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{5\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{7\pi}{16}}+\right. \\ &\quad \left.+\frac{1}{\sin^2\frac{9\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{11\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{13\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{15\pi}{16}}\right] =\end{aligned}$$

Opazimo lahko, da se členi v vsakem razcepu podvojijo. V drugi polovici členov bomo sinusu kot pretvorili v ostri kot in ta korak označili z zvezdico.

$$
\begin{aligned}
&\overset{*}{=} \frac{1}{64}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{5\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{7\pi}{16}}+\right.\\
&\left.+\frac{1}{\sin^2\frac{16\pi-9\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{16\pi-11\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{16\pi-13\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{16\pi-15\pi}{16}}\right]=\\
&= \frac{1}{64}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{5\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{7\pi}{16}}+\right.\\
&\left.+\frac{1}{\sin^2\frac{7\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{5\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{16}}\right]=\\
&= \frac{1}{64}\cdot 2\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{5\pi}{16}}+\frac{1}{\sin^2\frac{7\pi}{16}}\right]=
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} \overset{*}{=} \tag{13}
$$

$$
\overset{*}{=} \frac{2}{4^n}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} \tag{14}
$$

Vsoto (14) limitiramo po členih vsote $n \to \infty$ in upoštevamo limito $\lim_{N\to\infty} N\sin\frac{x}{N} = x$ za $N = 2^n$ in $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$. Dobimo naslednjo vrsto:

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{2}{4^n}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}=\\
&= \frac{2}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{(\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n\cdot 2})^2}=\\
&= \frac{2}{N^2}\sum_{k=0}^{N\cdot 2^{-1}-1}\frac{1}{(\sin\frac{x}{N})^2} \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\frac{(2k+1)\pi}{2})^2}=
\end{aligned}
$$

$$
= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \tag{15}
$$

Sedaj bomo dokazali, zakaj smo lahko limitirali po členih vsote. Dokažemo lahko s pomočjo Tannery-jevega izreka.
Torej če še enkrat zapišemo našo enakost (14):

$$
1 = \frac{2}{4^n}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f_k(n),
$$

kjer je

$$
f_k(n) = \frac{2}{4^n}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}.
$$

Sedaj bomo nastavili vse tako, da bomo lahko uporabili Tannery-jev izrek.
Če upoštevamo limito $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ dobimo:

$$\lim_{n\to\infty} 2^{n+1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}} = (2k+1)\pi\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}{\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} = (2k+1)\pi.$$

Torej:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_k(n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{4^n}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}\\ &= \lim_{n\to\infty} 8\cdot\frac{1}{(2^{n+1}\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}})^2} = \frac{8}{\pi^2(2k+1)^2}\end{aligned}$$

S tem smo izpolnili prvi pogoj za uporabo Tannery-jevega izreka ($\lim_{n\to\infty} f_k(n) = f_k$) Sedaj bomo napisali lemo, s katero si bomo pomagali pri drugem pogoju za uporabo Tannery-jevega izreka.

Lema 5.1. *Obstaja konstanta $c>0$ za katero velja:*

$$cx\le\sin x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}$$

Dokaz. Ker velja $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, je funkcija $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ neprekinjena funkcija x-a na intervalu $[0,\frac{\pi}{2}]$, kjer definiramo $f(0):=1$. f je pozitivna na $[0,\frac{\pi}{2}]$, ker je $f(0)=1>0$ in $\sin x>0$ za $0<x<\frac{\pi}{2}$. Torej je $f(x)\ge f(b)>0$ na intervalu $[0,\frac{\pi}{2}]$ za nek $b\in[0,\frac{\pi}{2}]$. S tem pa smo dokazali, da $cx\le\sin x$ na $[0,\frac{\pi}{2}]$, kjer je $c=f(b)>0$. □

Torej imamo za $0\le k<2^{n-1}-1$:

$$\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\le\frac{(2(2^{n-1}-1)+1)\pi}{2^{n+1}}=\frac{(2^n-1)\pi}{2^{n+1}}<\frac{\pi}{2}.$$

Iz leme pa sledi:

$$c\cdot\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\le\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\Rightarrow\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}\le\frac{4^{n+1}}{c^2(2k+1)^2\pi^2}.$$

Če množimo obe strani z $\frac{2}{4^n}$, dobimo naslednje:

$$\frac{2}{4^n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}\le\frac{8}{c^2\pi^2}\cdot\frac{1}{(2k+1)^2}=:M_k.$$

Sledi, da je $|f_k|\le M_k$ za vsak n, k. Torej je izpolnjen drugi pogoj za uporabo Tannery-jevega izrek. Še več, ker vsota $\sum_{k=0}^{\infty}M_k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{c^2\pi^2}\cdot\frac{1}{(2k+1)^2}$ konvergira, smo izpolnili vse pogoje za Tannery-jev izrek. Sedaj pa lahko Tannery-jevemu izreku lahko v (14) zamenjamo limito $n\to\infty$ in vsoto in limitiramo po členih vsote, ter dobimo (15).
Tannery-jevemu izreku pa se lahko tudi izognemo.
Velja:

$$\sin x<x<\tan x;\ 0<x<\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{\sin^2 x}>\frac{1}{x^2}>\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1$$

Sedaj za x vzamemo $x=\frac{(2k+1)\pi}{2N}$, $N=2^n$ in $k=0,\ldots,\frac{N}{2}-1$ in seštejemo.

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2\cdot 2^n}}>\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{(\frac{(2k+1)\pi}{2\cdot 2^n})^2}>\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2\cdot 2^n}}-\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}1$$

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} > \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{4^n}{(2k+1)^2} > \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} - 2^{n-1}$$

$$\frac{2}{4^n} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} > \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{(2k+1)^2} > \frac{2}{4^n} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} - \frac{2 \cdot 2^{n-1}}{2^{2n}}$$

$$\frac{2}{4^n} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} > \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{(2k+1)^2} > \frac{2}{4^n} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} - \frac{1}{2^n}$$

Če upoštevamo (14), dobimo:

$$1 > \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \frac{1}{(2k+1)^2} > 1 - \frac{1}{N}$$

Iz tega pa sledi (15). Tako smo ponovno dokazali, da lahko limitiramo po členih vsote.
Dokaz baselskega problema pa še ni končan, saj moramo pokazati kako dobimo iz vrste (15) vrsto (11). Enakost (15) preoblikujemo:

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \tag{16}$$

Zapišimo vrsto (11), še enkrat:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} = \zeta(2)$$

Začetno vrsto si lahko predstavljamo kot vsoto $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$ in $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ oziroma kot vsoto funkcije sodih in lihih členov. Izračunajmo kakšen del vrste $\zeta(2)$ predstavlja vsota s sodimi členi.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{1}{4} \zeta(2)
\end{aligned}$$

Torej vidimo, da mora preostali del $\frac{3}{4}\zeta(2)$ zavzeti vsota lihih členov:

$$\frac{3}{4}\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}^{2}$$

To pa je ravno enakost (16). Torej je $\zeta(2)$ enaka vsoti (16) pomnoženi s $\frac{4}{3}$.

6. Sorodni dokazi baselskega problema

Avtor mojega članka Josef Hofbauer je dobil navdih za svoj dokaz te vrste iz članka, ki ga je napisal Champman [1]. Idejo je dobil iz dveh dokazov, v katerih sta uporabljeni naslednji enakosti:

$$\sum_{k=1}^{N} \cot^2 \frac{k\pi}{2N+1} = \frac{N(2N-1)}{3} \tag{17}$$

in

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2N+1}} = \frac{2N(N+1)}{3}. \tag{18}$$

Poleg člankov, v katerih nastopata omenjeni vrsti, pa ga je navdihnila tudi vrsta, ki smo jo že zapisali v dokazu baselskega problema in sicer:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2N}} = N^2. \tag{19}$$

Dokaz enakosti (17)-(19) temelji na primerjavi koeficientov v primernem polinomu stopnje N katerega ničle so členi vsote.

7. Razširitev funkcije $\sin^{-2} x$ na delne ulomke

(19) je posebni primer naslednje enakosti ($x = \frac{\pi}{2}$):

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{x+k\pi}{N}} \tag{20}$$

Za $N = 2^n$ dokažemo (20) na isti način kot smo dokazali enakost (11).
Če pa vrsto zapišemo malo drugače:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{x+k\pi}{N}} \tag{21}$$

in uporabimo limito $N \to \infty$, dobimo:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x+k\pi)^2} \tag{22}$$

S pomočjo enakosti (21) lahko dokažemo (19), če vzamemo limito $x \to 0$ in zamenjamo N z $2N+1$.

8. Gregory-Leibnizova vrsta

Leta 1671 je škotski matematik James Gregory (1638-1675) odkril formulo:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots .$$

Tri leta pozneje, je neodvisno od Gregory-ja, nemški matematik Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) odkril isto formulo in jo objavil skupaj s posebnim primerom $x = 1$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \mp \cdots \tag{23}$$

Čeprav Gregory ni nikoli pisal o tem posebnem primeru, se vrsta vseeno imenuje po njemu in Leibnizu.
Vrsto (13) dokažemo podobno, kot smo dokazali baselski problem.
Uporabimo enakost:

$$\begin{aligned}
\cot x &= \frac{1}{2}\left[\frac{\cot^2\frac{x}{2}-1}{\cot\frac{x}{2}}\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\cot\frac{x}{2}-\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[\cot(\frac{x}{2})-\cot\left(\frac{\pi-x}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Nato vstavimo $x=\frac{\pi}{4}$ in ponavljamo postopek, ki smo ga ravnokar izpeljali:

$$\begin{aligned}
1 &= \cot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\left[\cot\frac{\pi}{8}-\cot\frac{3\pi}{8}\right] = \\
&= \frac{1}{4}\left[\cot\frac{\pi}{16}-\cot\frac{7\pi}{16}-\cot\frac{3\pi}{16}-\cot\frac{5\pi}{16}\right] = \cdots \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\cot\frac{(2k+1)\pi}{4N},
\end{aligned}$$

kjer je $N=2^n$.
Če vsoto limitiramo $N\to\infty$ in uporabimo $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\cot\frac{x}{N}=\frac{1}{x}$dobimo:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\cot\frac{(2k+1)\pi}{N\cdot 4} \\
&\overset{N\to\infty}{\Longrightarrow} \\
1 &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\frac{(2k+1)\pi}{4}} \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}
\end{aligned}$$

Ta vrsta ni absolutno konvergentna. Tudi tu moramo pokazati, zakaj lahko limitiramo po členih vsote. Zapišimo nov razcep funkcije $\cot x$, ki je ekvivalenten našemu, saj sledi iz začetnega razcepa funkcije $\cot x=\frac{1}{2}\left[\cot\frac{x}{2}-\cot\left(\frac{\pi-x}{2}\right)\right]$:

$$1=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\left(\cot\frac{(4k+1)\pi}{2^{n+2}}-\cot\frac{(4k+3)\pi}{2^{n+2}}\right).$$

Sedaj bomo desno stran slednje enakosti razpisali po naslednji formuli:

$$\begin{aligned}
\cot\alpha-\cot\beta=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos\beta}{\sin\beta} &= \frac{\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta} \\
&= \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.
\end{aligned}$$

Dobimo:

$$1=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{(4k+1)\pi}{4\cdot 2^n}\sin\frac{(4k+3)\pi}{2^{n+2}}}=\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}f_k(n),$$

kjer je:

$$f_k(n) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{(4k+1)\pi}{2^{n+2}} \sin \frac{(4k+3)\pi}{2^{n+2}}}$$

Sedaj bomo preverili pogoje za Tannery-jev izrek. Torej najprej bomo izračunali $\lim_{n\to\infty} f_k(n)$.

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{(4k+1)\pi}{4\cdot 2^n} \sin \frac{(4k+3)\pi}{4\cdot 2^n}} = 2^3 \frac{2^{n+1}}{2^{n+2}\cdot 2^{n+2}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{(4k+1)\pi}{2^{n+2}} \sin \frac{(4k+3)\pi}{2^{n+2}}}$$

$$= \frac{8}{\pi(4k+1)(4k+3)} \cdot \frac{2^{n+1}\pi \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\left(\frac{2^{n+2}}{(4k+1)\pi} \sin \frac{(4k+1)\pi}{2^{n+2}}\right) \cdot \left(\frac{2^{n+2}}{(4k+3)\pi} \sin \frac{(4k+3)\pi}{2^{n+2}}\right)}$$

Če upoštevamo limito $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, dobimo:

$$\lim_{n\to\infty} f_k(n) = \frac{8}{\pi(4k+1)(4k+3)}$$

Za preverjanje drugega pogoja za Tannery-jev izrek bomo najprej definirali lemo.

Lema 8.1. *Če je $|x| \leq 1$, potem velja:*

$$|\sin x| \leq \frac{6}{5}|x|.$$

Dokaz. Za $|x| \leq 1$ velja $|x|^k \leq |x|$ za poljuben $k \in \mathbb{N}$ in

$$\begin{aligned} (2k+1)! &= (2\cdot 3)\cdot(4\cdot 5)\cdot(6\cdot 7)\cdots(2n\cdot(2n+1)) \\ &\geq (2\cdot 3)\cdot(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 3)\cdots(2\cdot 3) = 6^n. \end{aligned}$$

Sledi:

$$\begin{aligned} |\sin x| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|}{6^n} = |x| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n} = \frac{1}{1-(1/6)}|x| = \frac{6}{5}|x|. \end{aligned}$$

□

Ker je $0 \leq \frac{\pi}{2^{n+1}} \leq 1$ za $n \in \mathbb{N}$ (ker je $\pi < 4$), imamo iz leme:

$$\sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \leq \frac{6}{5} \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Opazimo, da imamo za $0 \leq k \leq 2^{n+1} - 1$ in $0 \leq l \leq 4$:

$$\frac{(4k+l)\pi}{2^{n+2}} \leq \frac{(4(2^{n-1}-1)+l)\pi}{2^{n+2}} = \frac{(2^{n+1}-4+l)\pi}{2^{n+2}} \leq \frac{\pi}{2},$$

po lemi 5.1, pa sledi:

$$c \cdot \frac{(4k+l)\pi}{2^{n+2}} \leq \sin \frac{(4k+l)\pi}{2^{n+2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sin \frac{(4k+l)\pi}{2^{n+2}}} \leq \frac{1}{c} \cdot \frac{2^{n+2}}{(4k+l)\pi}.$$

Če to kombiniramo z $\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \leq \frac{6}{5}\cdot\frac{\pi}{2^{n+1}}$, vidimo, da imamo za $0 \leq k \leq 2^{n+1}-1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{(4k+1)\pi}{2^{n+2}}\sin\frac{(4k+3)\pi}{2^{n+2}}} &\leq \frac{1}{2^n}\cdot\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cdot\left(\frac{1}{c}\frac{2^{n+2}}{(4k+1)\pi}\right)\cdot\left(\frac{1}{c}\frac{2^{n+2}}{(4k+3)\pi}\right) \\
&= \frac{6}{5}\frac{8}{\pi(4k+1)(4k+3)}.
\end{aligned}$$

Sledi, da imamo za vsak k,n:

$$|f_k(n)| \leq \frac{6}{5}\frac{8}{\pi(4k+1)(4k+3)} =: M_k$$

Ker vsota $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ konvergira, smo zadostili pogojem za Tannery-jev izrek, torej lahko limitiramo vsoto po členih.

Literatura

[1] R. Champman, *Evaluating* $\zeta(2)$, 2003,
http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/cillerue/Curso/zeta2.pdf.

[2] M. Brojan, J. Globevnik, *Analiza 1*, DMFA Slovenije, Ljubljana, 2008 .

[3] J. Hofbauer, *A Simple Proof of* $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ *and Related Identities*, Monthly **109** (2002), 196–200.

[4] D. Kalman, *Six ways to sum a series*, College Math. J.**24** (1993), 402–421.

[5] P. Loya, *Amazing and Aesthetic Aspects of Analysis: On the incredible infinite*, www.math.binghamton.edu/dennis/478.f07/EleAna.pdf

[6] E. Sandifer, *Estimating the Basel Problem*, http://www.maa.org/editorial/euler/How Euler Did It 2002 Estimating the Basel Problem.pdf

[7] L. Zheng, *An Elementary Proof for Two Basic Alternating Series*, Monthly **109** (2002), 187-188 .